КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН
БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

Ж.О.Толубаев, Г.Н.Борубаева, С.А.Асанова

КАТАРЛАР ТЕОРИЯСЫ ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР БОЮНЧА ӨЗ АЛДЫНЧА ИШТЕРДИН ЖЫЙНАГЫ

(Өз алдынча иштерди аткарууга
усулдук көрсөтмөлөр)

СБОРНИК САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Методическое указания
к выполнению самостоятельных работ)

Бишкек 2015

УДК 51
ББК 22.1
Т 52

БатМУ СГЭИнин окуу усулдук кеңешмесинде талкууланып, басмага сунушталды.

Жооптуу редактору: Толбаев Б. – физика-математика илимдеринин кандидаты, профессор

Ж.О.Толубаев, Г.Н.Борубаева, С.А.Асанова
Т 52 **Катарлар теориясы жана дифференциалдык теңдемелер боюнча өз алдынча иштердин жыйнагы,**
- Б.: 2014.- 48 бет

ISBN 978-9967-26-288-1

Усулдук көрсөтмөлөр жогорку окуу жайларынын күндүзгү жана дистанттык бөлүмдөрүндө билим алышкан студенттердин математика боюнча өз алдынча иштөөсүнө сунушталат.

Методическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов по математике, обучающихся на дневной и дистанционных формах обучения.

Т 1602000000-15 УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-9967-26-288-1

К И Р И Ш   С Ө З

Азыркы күндө жогорку окуу жайлардын алдында окутуунун сапатын жогорулатуу жана дүйнөлүк деңгээлдеги жогорку билимдүү, квалификациялуу адис кадрларды даярдоо маселеси турат. Ал үчүн бүгүнкү күндө окутуу процессинде кредиттик системаны колдонуу негизги маселелерден болуп саналат. Кредиттик система боюнча окутуунун негизи болуп, окуу процессинде студенттердин өз алдынча иштөөсүн уюштуруу эсептелет. Өз алдынча иштин өзгөчөлүгү жекече иштөөгө, системалуулукка, үзгүлтүксүздүккө жана жөнөкөйдүн татаалга өтүү мүнөзгө ээ болууга тийиш. Өз алдынча иш окуу ишмердүүлүгүнүн бардык түрүн, студенттердин даярдыктарынын сапатын жана аудиториялык сабактын натыйжалуу өтүлүшүн камтыйт.

Кыргыз Республикасынын мамлекеттик билим берүүнүн стандартынын негизинде бакалавриаттык билим берүү бөлүмүндө, эң негизгиси ар бир адистиктин студенттеринин өз алдынча даярдануусуна окуу планынын 40%дан кем эмес сааты бөлүштүрүлгөн.

Математикадан студентердин өз алдынча иштөөсү үчүн алардын ар бирине тиешелүү мисал-маселерди түзүп чыгуу талап кылынат.

Сунуш кылынуучу усулдук колдонмо ушул милдеттерди чечүүгө жардам берет. Ал өз ичине математиканын катарлар теориясын жана дифференциалдык теңдемелер бөлүмдөрүн камтыйт. Студенттердин өз алдынча иштерин аткарууга жеңил болуусу үчүн колдонмодо негизги түшүнүктөр, формулалар жана ар бир бөлүмгө тиешелүү мисалдардын чыгарылыштары толугу менен берилди. Ал мисалдар жана көнүгүүлөр студенттердин жалпы теориялык билимдерин бекемдөөгө, математикалык маданиятын өстүрүүгө жана математикалык аппаратты ар кандай м аселелерди чыгарууда пайдалануу билгичтиктерин өнүктүрүүгө көмөк берет.

Колдонмо даярдала турган адистиктердин өзгөчөлүктөрүнө жараша математика адистигине жана математик эмес адистиктердин мамлекеттик типтүү программаларынын негизинде түзүлдү.

Усулдук колдонмо жогорку окуу жайларынын бакалавриаттык жана дистанттык бөлүмдөрүндө билим алышкан студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн сунушталат.

§1. Даражалуу катарлар.

№1-10. **Даражалуу катарлардын жыйналуу интервалдарын тапкыла.**

№1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{5^n}}x^n=\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{2^2}{\sqrt{5^2}}x^2+\frac{2^3}{\sqrt{5^3}}x^3+...$

Даламбердин белгисин колдонобуз: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{\sqrt{5^n}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{5^{n+1}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{5^n}}\cdot\frac{\sqrt{5^n}\sqrt{5}}{2^n\cdot 2}=\frac{\sqrt{5}}{2};\;\; R=\left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right|;$$

Жыйналуу интервалы: $-\frac{\sqrt{5}}{2}<x<\frac{\sqrt{5}}{2};$

№2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\cdot x^n=\frac{2}{3}x+\frac{3}{3^2}x^2+\frac{4}{3^3}x^3+...$

Даламбердин белгисин колдонобуз: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n+2}{3^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^n}\cdot\frac{3^n\cdot 3}{n+2}=3\cdot 1=3;\;\; R=|3|;$$

Жыйналуу интервалы: $-3<x<3;$

№3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}\cdot x^n=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2\cdot 4^2}x^2+\frac{1}{3\cdot 4^3}x^3+...$

Даламбердин белгисин колдонобуз: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot 4^n}}{\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n4^n}\cdot\frac{(n+1)4^{n+1}}{1}=4;\;\; R=|4|;$$

Жыйналуу интервалы: $-4<x\le 4;$

№4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}\cdot x^n=\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{2^2}{\sqrt{3^2}}x^2+\frac{2^3}{\sqrt{3^3}}x^3+...$

Даламбердин белгисин колдонобуз: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^{n+1}}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}\cdot\frac{\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}\cdot\frac{\sqrt{3^n}\sqrt{3}}{2^n\cdot 2}=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad R=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|;$$

Жыйналуу интервалы: $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x<\frac{\sqrt{3}}{2};$

№5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5n}\cdot x^n=\frac{1}{5}x+\frac{1}{2\cdot 5^2}x^2+\frac{1}{3\cdot 5^3}x^3...$

Даламбердин белгисин колдонобуз: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot 5^n}}{\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}\cdot\frac{(n+1)5^n\cdot 5}{1}=5\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=5;\quad R=|5|;$$

Жыйналуу интервалы: $-5<x<5;$

№6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}x^n=\frac{2}{\sqrt{1}}x+\frac{2^2}{\sqrt{2}}x^2+\frac{2^3}{\sqrt{3}}x^3+...$

Даламбердин белгисин колдонобуз: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{\sqrt{n}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{2^n\cdot 2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};\quad R=\left|\frac{1}{2}\right|;$$

Жыйналуу интервалы: $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2};$

№7. $\sum_{n\to\infty}\frac{3^n}{\sqrt{2^n}}x^n=\frac{3}{\sqrt{2}}x+\frac{3^2}{\sqrt{2^2}}x^2+\frac{3^3}{\sqrt{2^3}}x^2+...$

Даламбердин белгисин колдонобуз: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{a^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{\sqrt{2^n}}}{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{2^{n+1}}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{\sqrt{2^n}}\cdot\frac{\sqrt{2^n}\cdot\sqrt{2}}{3^n\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{3}; \qquad R = \left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right|;$$

Жыйналуу интервалы: $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$;

№8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{2n+1}\cdot x^n = \frac{7}{3}x + \frac{7^2}{5}x^2 + \frac{7^3}{7}x^3 + \ldots$

Даламбердин белгисин колдонобуз: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{a^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7^n}{2n+1}}{\frac{7^{n+1}}{2n+3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{2n+1}\cdot\frac{2n+3}{7^n\cdot 7} = \frac{1}{7}; \qquad R = \left|\frac{1}{7}\right|;$$

Жыйналуу интервалы: $-\frac{1}{7} \le x \le \frac{1}{7}$

№9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{4^n}\cdot x^n = \frac{3}{4}x + \frac{4}{4^2}x^2 + \frac{5}{4^3}x^3 + \ldots$

Даламбердин белгисин колдонобуз: $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{4^n}}{\frac{n+3}{4^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4^n}\cdot\frac{4^n\cdot 4}{n+3} = 4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3} = 4\cdot 1 = 4; \qquad R = |4|;$$

Жыйналуу интервалы: $-4 < x < 4$;

№10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{4n+5}x^n = \frac{3}{9}x + \frac{4}{13}x^2 + \frac{5}{25}x^3 + \ldots$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{4n+5}}{\frac{n+3}{4n+9}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(4n+9)}{(n+3)(4n+5)} = 1$$

Жыйналуу интервалы: $-4 < x < 4$;

§2. Дифференциалдык теңдемелер.

Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемени интегралдагыла.

Көрсөтмө: Дифференциалдык теңдемени интегралдоодо төмөндөглөрдү аныктоо керек.

1. Теңдеменин тибин;
2. Теңдемеге тиешелүү усулдардын негизинде анын жалпы чыгарылышын;
3. Теңдеменин баштапкы шартты канаттандырган жекече чыгырылышын;

Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин тибин аныктоого жана аларды чыгыруууга көрсөтмөлөрдүн таблицасы

№	**Дифференциалдык теңдемелердин түрү**	**Теңдеменин аталышы**	**Чыгарууга көрсөтмө**
1.	$\mathrm{M}(x)\cdot \mathrm{N}(y)dx + M_1(x)\cdot N_1(y)dy = 0$	Өзгөрүлмөлөргө ажыроочу	$\frac{M(x)}{M_1(x)}dx + \frac{N_1(x)}{N(y)}dy = 0$
2.	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Бир тектүү	$\frac{y}{x} = t$ ордуна коюсу
3.	$y' + P(x)\cdot y = Q(x)$	y жана y' ке карата сызыктуу	$y = u\vartheta$ ордуна коюсу
4.	$xy + P(y)\cdot x = Q(y)$	x жана x' ке карата сызыктуу	$x = u\vartheta$ ордуна коюсу
5.	$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^n$ мында $n \neq 0$ жана $n \neq 1$	Бернуллинин теңдемеси	$y^{n-1} = t$ ордуна коюсу
6.	$M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ $\frac{\partial M(x;y)}{\partial NNy} = \frac{\partial N(x;y)}{\partial x}$	Толук дифференциалдагы дифференциалдык теңдеме	$\begin{cases} u = M(x;y)dx + \varphi(y) \\ v = N(x;y)dy + \psi(x) \end{cases}$ $u = c$ ордуна коюсу

Эскертүү: Эгерде дифференциалдык теңдеме бир нече типке тийешелүү болсо, анда алардын ичинен эң жөнөкөйүн тандап алуу керек.

№1-10. Берилген дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла.

№1. $(1+y)y' = y$

$$(1+y)\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int (1+y)\frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y}+1\right)dy = \int dx$$

$\ln|y| + y = x + C -$ жалпы чыгарылыш.

№2. $y' ctgx + y = 2$

$$\frac{dy}{dx}ctgx = 2 - y$$

$$\frac{dy}{2-y} = \frac{dx}{ctgx}$$

$$\int \frac{dy}{2-y} = \int tgx dx$$

$$\ln|2-y| = -\ln|\cos x| + \ln C$$

$$2 - y = \frac{C}{\cos x};$$

$y = 2 - \dfrac{C}{\cos x} -$ жалпы чыгарылыш.

№3. $y' = \dfrac{y+1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dy}{x}$$

$$\ln|y+1| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$y + 1 = Cx$$

$y = Cx - 1 -$ жалпы чыгарылыш.

№4. $y'tgx = y$

$$\frac{dy}{dx}tgx = y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int ctgxdx$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|C|$$

$y = C\sin x -$ жалпы чыгарылыш.

№5. $(1+e^x)y \cdot y' = e^x$

$$yy' = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left|1+e^x\right| + C$$

$y^2 = 2x + C -$ жалпы чыгарылыш.

№6. $y' = e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int e^x dx$$

$$-\frac{1}{e^y} = e^x + C$$

$y = \ln\left|e^x + C\right| -$ жалпы чыгарылыш.

№7. $y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1+y^2}$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C;$$

$\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} = C -$ жалпы чыгарылыш.

№8. $2x^2yy' + y^2 = 2$

$$2x^2yy' = 2 - y^2$$

$$\int \frac{y}{2-y^2}dy = \int \frac{dx}{2x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|2-y^2\right| = -\frac{1}{2x} + C$$

$$\ln\left|2-y^2\right|=\frac{1}{x}+C-$$ жалпы чыгарылыш.

№9. $xy'=y$

$$x\frac{dy}{dx}=y$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=\ln|x|+\ln C$$

$y=Cx-$ жалпы чыгарылыш.

№10. $\left(1+y^2\right)dx+\left(1+x^2\right)dy=0$

$$\left(1+x^2\right)dy=-\left(1+y^2\right)dx$$

$$\int\frac{dy}{1+y^2}=-\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$arctgy=-arctgx+C-$ жалпы чыгарылыш.

№1-12. ***Экинчи тартиптеги турактуу коэффициенттүү дифференциалдык теңдемелерди интегралдагыла.***

№1. $y''+y'=0;\qquad y(0)=1;\qquad y'(0)=0$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$$k^2e^{kx}+ke^{kx}=0$$

$$k^2+k=0$$

$$k(k-1)=0$$

$$k_1=0;\qquad k_2=1$$

$y=C_1+C_2e^{-x}-$жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y=C_1+C_2e^{-x}$$

$$y'=-C_2e^{-x}$$

$$\begin{cases}y(0)=1\\y'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_2=1\\-C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\C_2=0\end{cases}$$

$y=1-$ жекече чыгарылыш.

№2. $y''+6y'+2y=0;\quad y(0)=1;\quad y'(0)=0$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$k^2+6k+9=0;\ \ k_{1,2}=\dfrac{-6\pm 0}{2}=-3$; $y(x)=(C_1x+C_2)e^{-3x}-$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылыштарды табабыз:

$$y'(x)=C_1\cdot e^{-3x}+(C_1x+C_2)\cdot(-3)e^{-3x}$$

$$\begin{cases} y(0)=1; \\ y'(0)=0; \end{cases}\quad \begin{cases} C_2=1; \\ C_1+C_2=3; \end{cases}\quad \begin{cases} C_2=1 \\ C_1=2 \end{cases}$$

$y=(2x+1)e^{-3x}-$ жекече чыгарылыш.

№3. $y''-8y'+16y=0;\quad y(0)=6;\quad y'(0)=5$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$k^2-8k+16=0;\ k_{1,2}=4.\ \ y(x)=(C_1x+C_2)e^{4x}-$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y'(x)=C_1e^{4x}+4(C_1x+C_2)e^{4x}$$

$$\begin{cases} y(0)=6; \\ y'(0)=5; \end{cases}\quad \begin{cases} C_2=6; \\ C_1+4C_2=5; \end{cases}\quad \begin{cases} C_2=6 \\ C_1=-19 \end{cases}$$

$y=(6-19x)e^{4x}-$ жекече чыгарылыш.

№4. $y''-4y'+5y=0;\quad y(0)=2;\quad y'(0)=3$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$k^2-4k+5=0$

$k_1=5;\ k_2=-1$

$y(x)=C_1e^{5x}+C_2e^{-x}-$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y' = 5C_1e^{5x} - C_2e^{-x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 2; \\ y'(0) = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ 5C_1 - C_2 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{7}{6} \\ C_1 = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

$y = \frac{5}{6}e^{5x} + \frac{7}{6}e^{-x} -$ жекече чыгарылыш.

№5. $y'' + 4y' = 0; \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = 4$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y = e^{kx}; \qquad y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + 4k = 0$$
$$k(k+4) = 0$$
$$k_1 = 0; \; k_2 = -4$$

$y(x) = C_1 + C_2e^{-4x} -$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y'(x) = -4C_2 \cdot e^{-4x}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5; \\ C_2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 6 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$y = 6 - e^{-4x} -$ жекече чыгарылыш.

№6. $y'' + 2y' = 0; \quad y(0) = 7; \quad y'(0) = 6$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y = e^{kx}; \qquad y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + 2k = 0$$
$$k(k+2) = 0$$
$$k_1 = 0; \; k_2 = -2$$

$y(x) = C_1 + C_2e^{-2x} -$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y'(x) = -2C_2e^{-2x}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 7 \\ C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$

$y = 10 - 3e^{-2x} -$ жекече чыгарылыш.

№7. $y'' + 2y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y = e^{kx}; \qquad y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + 2 = 0$$
$$k^2 = -2$$
$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-2}$$

$y(x) = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x -$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y' = -\sqrt{2}C_1 \sin\sqrt{2}x + \sqrt{2}C_2 \cos\sqrt{2}x$$
$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$y(x) = \cos\sqrt{2}x -$ жекече чыгарылыш.

№8. $2y'' + y' = 0; \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 2$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y = e^{kx}; \qquad y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$2k^2 + k = 0$$
$$k(2k + 1) = 0$$
$$k_1 = 0$$
$$k_2 = -\frac{1}{2}$$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{2}} -$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y(x) = -\frac{1}{2}C_2 e^{-\frac{x}{2}}$$
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ -\frac{1}{2}C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 8 \\ C_2 = -4 \end{cases}$$

$y(x) = 8 - 4e^{-\frac{x}{2}} -$ жекече чыгарылыш.

№9. $y'' - 4y' + 3y = 0;$ $\quad y(0) = 3;$ $\quad y'(0) = 7$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y = e^{kx};$ $\quad y' = ke^{kx};$ $\quad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$
$$k_1 = 3;\ k_2 = 1$$

$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^x -$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^x$$
$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ 3C_1 + C_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 3 - C_1 \\ C_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 2 \end{cases}$$

$y = 2e^{3x} + e^x -$ жекече чыгарылыш.

№10. $y'' + y' = 0;$ $\quad y(0) = 1;$ $\quad y'(0) = 0$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y = e^{kx};$ $\quad y' = ke^{kx};$ $\quad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + k = 0$$
$$k(k+1) = 0$$
$$k_1 = 0;\ k_2 = -1$$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} -$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y'(x) = -C_2 e^{-x}$$
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$y(x) = 1 -$ жекече чыгарылыш.

№11. $y'' + y' - 2y = 0;$ $\quad y(0) = 1;$ $\quad y'(0) = 2$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$$k^2+k-2=0$$
$$k_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$
$$k_1=1;\ k_2=-2$$

$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}-$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y'(x)=C_1e^x-2C_2e^{-2x}$$

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\ C_1-2C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1-C_2\\ C_2=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{4}{3}\\ C_2=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$y=\frac{4}{3}e^x-\frac{1}{3}e^{-2x}-$ жекече чыгарылыш.

12. $y''+9y=0;\qquad y(0)=1;\qquad y'(0)=0$

Мүнөздөгүч теңдемени түзүп, анын тамырларын табабыз:

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$$k^2+9=0$$
$$k^2=-9$$
$$k_{1,2}=\pm\sqrt{-9}$$
$$k_{1,2}=\pm 3\sqrt{-1}$$

$y(x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-$ жалпы чыгарылыш.

Баштапкы шарттарды канаттандырган жекече чыгарылышты табабыз:

$$y'=3C_1\sin 3x+3C_2\cos 3x$$

$$\begin{cases}y(0)=1\\ y'(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=0\end{cases}$$

$y=\cos 3x-$ жекече чыгарылыш.

§1.1. Степенные ряды.

Найти интервал сходимости степенных рядов.

№1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{5^n}}x^n=\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{2^2}{\sqrt{5^2}}x^2+\frac{2^3}{\sqrt{5^3}}x^3+\ldots$

Применяем признак Даламбера $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^n}{\sqrt{5^n}}}{\dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{5^{n+1}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{5^n}}\cdot\frac{\sqrt{5^n}\sqrt{5}}{2^n\cdot 2}=\frac{\sqrt{5}}{2};\ \ R=\left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right|;$$

Интервал сходимости: $-\frac{\sqrt{5}}{2}<x<\frac{\sqrt{5}}{2};$

№2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\cdot x^n=\frac{2}{3}x+\frac{3}{3^2}x^2+\frac{4}{3^3}x^3+\ldots$

Применяем признак Даламбера $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{n+1}{3^n}}{\dfrac{n+2}{3^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^n}\cdot\frac{3^n\cdot 3}{n+2}=3\cdot 1=3;\ R=|3|;$$

Интервал сходимости: $-3<x<3;$

№3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 4^n}\cdot x^n=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2\cdot 4^2}x^2+\frac{1}{3\cdot 4^3}x^3+\ldots$

Применяем признак Даламбера $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot 4^n}}{\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n4^n}\cdot\frac{(n+1)4^{n+1}}{1} = 4;\ R = |4|;$$

Интервал сходимости: $-4 < x \le 4;$

№4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}\cdot x^n = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{2^2}{\sqrt{3^2}}x^2 + \frac{2^3}{\sqrt{3^3}}x^3 + ...$

Применяем признак Даламбера $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^{n+1}}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}\cdot\frac{\sqrt{3^{n+1}}}{2^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3^n}}\cdot\frac{\sqrt{3^n}\sqrt{3}}{2^n\cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad R = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|;$$

Интервал сходимости: $-\frac{\sqrt{3}}{2} \le x < \frac{\sqrt{3}}{2};$

№5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5n}\cdot x^n = \frac{1}{5}x + \frac{1}{2\cdot 5^2}x^2 + \frac{1}{3\cdot 5^3}x^3...$

Применяем признак Даламбера $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n\cdot 5^n}}{\frac{1}{(n+1)5^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}\cdot\frac{(n+1)5^n\cdot 5}{1} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 5;\quad R = |5|;$$

Интервал сходимости: $-5 < x < 5;$

№6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}x^n = \frac{2}{\sqrt{1}}x + \frac{2^2}{\sqrt{2}}x^2 + \frac{2^3}{\sqrt{3}}x^3 + ...$

Применяем признак Даламбера $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{\sqrt{n}}}{\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{2^n\cdot 2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};\quad R=\left|\frac{1}{2}\right|;$$

Интервал сходимости: $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2};$

№7. $\sum_{n\to\infty}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{2^n}}x^n=\frac{3}{\sqrt{2}}x+\frac{3^2}{\sqrt{2^2}}x^2+\frac{3^3}{\sqrt{2^3}}x^2+\ldots$

Применяем признак Даламбера $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{a^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{\sqrt{2^n}}}{\frac{3^{n+1}}{\sqrt{2^{n+1}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{\sqrt{2^n}}\cdot\frac{\sqrt{2^n}\cdot\sqrt{2}}{3^n\cdot 3}=\frac{\sqrt{2}}{3};\qquad R=\left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right|;$$

Интервал сходимости: $-\frac{\sqrt{2}}{3}<x<\frac{\sqrt{2}}{3};$

№8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{2n+1}\cdot x^n=\frac{7}{3}x+\frac{7^2}{5}x^2+\frac{7^3}{7}x^3+\ldots$

Применяем признак Даламбера $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^n}{a^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7^n}{2n+1}}{\frac{7^{n+1}}{2n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{2n+1}\cdot\frac{2n+3}{7^n\cdot 7}=\frac{1}{7};\qquad R=\left|\frac{1}{7}\right|;$$

Интервал сходимости: $-\frac{1}{7}\le x\le\frac{1}{7}$

№9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{4^n}\cdot x^n=\frac{3}{4}x+\frac{4}{4^2}x^2+\frac{5}{4^3}x^3+\ldots$

Применяем признак Даламбера $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+2}{4^n}}{\frac{n+3}{4^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4^n}\cdot\frac{4^n\cdot 4}{n+3}=4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=4\cdot 1=4;\qquad R=|4|;$$

Интервал сходимости: $-4 < x < 4$;

№10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{4n+5} x^n = \frac{3}{9} x + \frac{4}{13} x^2 + \frac{5}{25} x^3 + \ldots$

Применяем признак Даламбера $R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n+2}{4n+5}}{\frac{n+3}{4n+9}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+2)(4n+9)}{(n+3)(4n+5)} = 1$$

Интервал сходимости: $-4 < x < 4$;

§2.1. Дифференциальные уравнения.

Указания: при решении дифференциального уравнения нужно.

1. Определить, к какому типу оно принадлежит, таблица некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка приведена ниже;
2. Найти общее решение или общий интеграл уравнения методам, разработанных для такого типа уравнений;
3. Найти частное решения или частный интеграл, удовлетворяющий этому условию.

Таблица

Дифференциальных уравнений первого порядка и указания к их решению

№	**Вид дифференциального уравнения**	**Названия уравнения**	**Указания к решению**
1.	$\mathrm{M}(x)\cdot \mathrm{N}(y)dx + M_1(x)\cdot N_1(y)dy = 0$	Уравнения с разделенными переменными	$\frac{M(x)}{M_1(x)}dx + \frac{N_1(x)}{N(y)}dy = 0$
2.	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Однородное	Подстановка $\frac{y}{x} = t$
3.	$y' + P(x)\cdot y = Q(x)$	Линейное относительно y и y'	Подстановка $y = u\vartheta$
4.	$x' + P(y)\cdot x = Q(y)$	Линейное относительно x и x'	Подстановка $x = u\vartheta$
5.	$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^n$ где $n \neq 0$ и $n \neq 1$	Уравнение Бернулли	Подстановкой $y^{n-1} = t$ сводится к линейному уравнению
6.	$M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ $\frac{\partial M(x;y)}{\partial NNy} = \frac{\partial N(x;y)}{\partial x}$	Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах	$\begin{cases} u = M(x;y)dx + \varphi(y) \\ v = N(x;y)dy + \psi(x) \end{cases}$ $u = c$

Примечания: Если данное дифференциальное уравнения относится сразу к нескольким типам, то для решения выбирают более простую из них.

№1-10. Найти общее решения дифференциального уравнения первого порядка.

№1. $(1+y)y' = y$

$$(1+y)\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int (1+y)\frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y}+1\right)dy = \int dx$$

$\ln|y| + y = x + C -$ общее решение

№2. $y' ctgx + y = 2$

$$\frac{dy}{dx}ctgx = 2 - y$$

$$\frac{dy}{2-y} = \frac{dx}{ctgx}$$

$$\int \frac{dy}{2-y} = \int tgxdx$$

$$\ln|2-y| = -\ln|\cos x| + \ln C$$

$$2 - y = \frac{C}{\cos x};$$

$y = 2 - \dfrac{C}{\cos x} -$ общее решение.

№3. $y' = \dfrac{y+1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dy}{x}$$

$$\ln|y+1| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$y + 1 = Cx$$

$y = Cx - 1 -$ общее решение.

№4. $y' tgx = y$

$$\frac{dy}{dx} tgx = y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int ctgx dx$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|C|$$

$y = C \sin x -$ общее решение.

№5. $(1+e^x) y \cdot y' = e^x$

$$yy' = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\int y dy = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln\left|1+e^x\right| + C$$

$y^2 = 2x + C -$ общее решение.

№6. $y' = e^{x+y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int e^x dx$$

$$-\frac{1}{e^y} = e^x + c$$

$y = \ln\left|e^x + C\right| -$ общее решение.

№7. $y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = -x\sqrt{1+y^2}$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C;$$

$\sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2} = C -$ общее решение.

№8. $2x^2yy' + y^2 = 2$

$$2x^2yy' = 2 - y^2$$

$$\int \frac{y}{2-y^2}\,dy = \int \frac{dx}{2x^2}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|2-y^2\right| = -\frac{1}{2x} + C$$

$\ln\left|2-y^2\right| = \frac{1}{x} + C -$ общее решение.

№9. $xy' = y$

$$x\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C$$

$y = Cx -$ общее решение.

№10. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

$$(1+x^2)dy = -(1+y^2)dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = -\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$arctgy = -arctgx + C -$ общее решение.

№1-10. Проинтегрировать дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Найти: а) Общее решение дифференциального уравнения.

б)Частное решение дифференциального уравнения второго порядка удовлетворяющее заданным начальным условиям.

№1. $y''+y'=0;$ $\quad y(0)=1;$ $\quad y'(0)=0$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$y = e^{kx};$ $\quad y' = ke^{kx};$ $\quad y'' = k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2e^{kx}+ke^{kx}=0$$
$$k^2+k=0$$
$$k(k-1)=0$$
$$k_1=0;\qquad k_2=1$$

$y=C_1+C_2e^{-x}$ – общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=C_1+C_2e^{-x}$$
$$y'=-C_2e^{-x}$$
$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ -C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=0 \end{cases}$$

$y=1$ – частное решение.

№2. $y''+6y'+2y=0;\quad y(0)=1;\quad y'(0)=0$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$$k^2+6k+9=0$$
$$k_{1,2}=\frac{-6\pm 0}{2}=-3$$

$y(x)=(C_1x+C_2)e^{-3x}$ – общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'(x)=C_1\cdot e^{-3x}+(C_1x+C_2)\cdot(-3)e^{-3x}$$

$$\begin{cases} y(0)=1; \\ y'(0)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2=1; \\ C_1+C_2=3; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2=1 \\ C_1=2 \end{cases}$$

$y=(2x+1)e^{-3x}$ – частное решение.

№3. $y''-8y'+16y=0;\qquad y(0)=6;\qquad y'(0)=5$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$$k^2-8k+16=0$$
$$k_{1,2}=4$$

$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{4x}$ – общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'(x) = C_1 e^{4x} + 4(C_1 x + C_2)e^{4x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 6; \\ y'(0) = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 6; \\ C_1 + 4C_2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 6 \\ C_1 = -19 \end{cases}$$

$y = (6 - 19x)e^{4x}$ – частное решение.

№4. $y'' - 4y' + 5y = 0; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 3$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y = e^{kx}; \qquad y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$
$$k_1 = 5;\ k_2 = -1$$

$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}$ – общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y' = 5C_1 e^{5x} - C_2 e^{-x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 2; \\ y'(0) = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ 5C_1 - C_2 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{7}{6} \\ C_1 = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

$y = \dfrac{5}{6}e^{5x} + \dfrac{7}{6}e^{-x}$ – частное решение.

№5. $y'' + 4y' = 0; \quad y(0) = 5; \quad y'(0) = 4$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y = e^{kx}; \qquad y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + 4k = 0$$
$$k(k + 4) = 0$$
$$k_1 = 0;\ k_2 = -4$$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{-4x}$ – общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'(x) = -4C_2 \cdot e^{-4x}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5; \\ C_2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 6 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$y = 6 - e^{-4x}$ – частное решение.

№6. $y'' + 2y' = 0; \quad y(0) = 7; \quad y'(0) = 6$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y = e^{kx}; \qquad y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + 2k = 0$$
$$k(k+2) = 0$$
$$k_1 = 0; \quad k_2 = -2$$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{-2x}$ – общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'(x) = -2C_2 e^{-2x}$$
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 7 \\ C_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$

$y = 10 - 3e^{-2x}$ – частное решение.

№7. $y'' + 2y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y = e^{kx}; \qquad y' = ke^{kx}; \qquad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + 2 = 0$$
$$k^2 = -2$$
$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-2}$$

$y(x) = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x$ – общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y' = -\sqrt{2}C_1 \sin\sqrt{2}x + \sqrt{2}C_2 \cos\sqrt{2}x$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$y(x)=\cos\sqrt{2}x-$ частное решение.

№8. $2y''+y'=0;\quad y(0)=4;\quad y'(0)=2$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$$2k^2+k=0$$
$$k(2k+1)=0$$
$$k_1=0$$
$$k_2=-\frac{1}{2}$$

$y(x)=C_1+C_2e^{-\frac{x}{2}}-$ общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x)=-\frac{1}{2}C_2e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\begin{cases}C_1+C_2=4\\ -\frac{1}{2}C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=8\\ C_2=-4\end{cases}$$

$y(x)=8-4e^{-\frac{x}{2}}-$ частное решение.

№9. $y''-4y'+3y=0;\qquad y(0)=3;\qquad y'(0)=7$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y=e^{kx};\qquad y'=ke^{kx};\qquad y''=k^2e^{kx}$ так, как $e^{kx}\neq 0$

$$k^2-4k+3=0$$
$$k_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2}$$
$$k_1=3;\ k_2=1$$

$y(x)=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-$ общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'=3C_1e^{3x}+C_2e^{x}$$

$$\begin{cases}y(0)=3\\ y'(0)=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_2=3\\ 3C_1+C_2=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=3-C_1\\ C_1=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=1\\ C_1=2\end{cases}$$

$y = 2e^{3x} + e^{x} -$ частное решение.

№10. $y'' + y' = 0;\qquad y(0) = 1;\qquad y'(0) = 0$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y = e^{kx};\qquad y' = ke^{kx};\qquad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + k = 0$$
$$k(k+1) = 0$$
$$k_1 = 0;\ k_2 = -1$$

$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} -$ общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'(x) = -C_2 e^{-x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$y(x) = 1 -$ частное решение.

№11. $y'' + y' - 2y = 0;\qquad y(0) = 1;\qquad y'(0) = 2$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y = e^{kx};\qquad y' = ke^{kx};\qquad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + k - 2 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$
$$k_1 = 1;\ k_2 = -2$$

$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} -$ общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'(x) = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ C_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{4}{3} \\ C_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$y = \frac{4}{3} e^{x} - \frac{1}{3} e^{-2x} -$ частное решение.

12. $y'' + 9y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

$y = e^{kx}; \quad y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}$ так, как $e^{kx} \neq 0$

$$k^2 + 9 = 0$$
$$k^2 = -9$$
$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-9}$$
$$k_{1,2} = \pm 3\sqrt{-1}$$

$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x -$ общее решение.

Находим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y' = 3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$y = \cos 3x -$ частное решение.

«*Катарлар теориясы*» жана **«*Дифференциалдык теңдемелер*»** бөлүмдөрү боюнча өз алдынча иштердин топтому.

Сборник самостоятельных работ ***по разделам: «Теория рядов» и «Дифференциальные уравнения»***

1-тапшырма
1 – задание

№1-30. Берилген катарлардын суммаларын тапкыла.

№1-30. Найти сумму следующих рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{9n^2-12n-5}$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+6n-8}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{9n^2+21n-8}$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-28n-45}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n+1}{6^n}$ **8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n-2}$ **9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{36n^2+12n-35}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-84n-13}$ **11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{4n^2-9}$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4n^2+4n-3}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2+8n-15}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{16n^2-8n-15}$ **15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$ **17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n-2^n}{7^n}$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n+2^n}{5^n}$ **21.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n-4^n}{8^n}$

22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{4^n}$ **23.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n+4^n}{12^n}$ **24.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}$

25. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-......-\frac{1}{2^n}$ **26.** $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+....$

27. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+....$ **28.** $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+....$

29. $1-\frac{3}{4}+\frac{4}{9}-\frac{27}{64}+....$ **30.** $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+.....$

2-тапшырма
2 – задание

№1-30. Берилген катарларды жыйналуучулукка изилдегиле.

№1-30. Исследовать на сходимость числовые ряды.

1. а) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$

2. а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}$

3. а) $1+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$

4. а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$

5. а) $1+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 4}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{9\cdot 16}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

6. а) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}$

7. а) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2^2}+\frac{\sqrt{3}}{2^3}-\frac{\sqrt{4}}{2^4}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$

8. а) $\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$

9. а) $1+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^4}+\frac{2^3}{1+2^6}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^2+1}$

10. а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

11. а) $\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{13}}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{1+3^{2n}}$

12. а) $\frac{1\cdot 2}{3}+\frac{2\cdot 3}{3^2}+\frac{3\cdot 4}{3^3}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$

13. а) $1+\frac{2}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{2^3}{4^4}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n+1}$

14. а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\frac{5}{26}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt{n(n+1)}}$

15. а) $2+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$

16. а) $1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\frac{4}{19}+\frac{5}{25}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(3n-1)^{2n}}$

17. а) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\frac{3^4}{4\cdot 2^4}+....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2-1}$

18. а) $\frac{3}{1}+\frac{3^2}{1\cdot 2}+\frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)}$

19. а) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+......$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$

20. а) $\frac{1}{2}+\frac{8}{2^2}+\frac{27}{2^3}+\frac{64}{2^4}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}$

21. а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}$

22. а) $\frac{1}{4}+\frac{1}{25}+\frac{1}{64}+\frac{1}{121}+....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}$

23. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{1}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^2+1}$

24. а) $\sqrt{2+}\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{5}{4}}+....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$

25. а) $\frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{2\cdot 2^4}+\frac{1}{3\cdot 2^6}+\frac{1}{4\cdot 2^8}+....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$

26. а) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)^n}$

27. а) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$

28. а) $\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\frac{9}{4\cdot 5}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$

29. а) $\frac{1}{2\cdot 8}-\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{8\cdot 14}+\frac{1}{11\cdot 17}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 5^n}$

30. а) $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{11\cdot 11}+\frac{1}{16\cdot 15}+.....$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

3-тапшырма
3 - задание

№1-30. $0{,}001$ ***тактыкка чейин жакындаштырып эсептегиле.***

№1-30. Вычислить приближенно с точностью до $0{,}001$.

1. $\sqrt{19}$ ***2.*** $\cos 18^\circ$ ***3.*** $\sqrt{e}$ ***4.*** $\sqrt[4]{9}$ ***5.*** $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ***6.*** $\sin 9^\circ$

1. $\ln 5$ ***8.*** $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ***9.*** $\ln 2$ ***10.*** $\ln 0{,}97$ ***11.*** $\ln 10$ ***12.*** $\ln 3$

13. $\ln 0{,}96$ ***14.*** $\sqrt[3]{1{,}06}$ ***15.*** $\sqrt{7}$ ***16.*** $\sqrt[3]{1020}$ ***17.*** $\sqrt[3]{124}$ ***18.*** $\sin 1^\circ$

19. $\sin 18^\circ$ ***20.*** $\sin 11^\circ$ ***21.*** $\cos 20^\circ$ ***22.*** $\ln 1{,}2$ ***23.*** $\cos 25^\circ$ ***24.*** $\cos 4^\circ$

25. $arctg\, 0{,}1$ ***26.*** $\sin 25^\circ$ ***27.*** $\sqrt[3]{e}$ ***28.*** $\sin 15^\circ$ ***29.*** $\sqrt[5]{37}$ ***30.*** $\sqrt[3]{60}$

4-тапшырма
4 – задание

№1-30. Берилген даражалуу катарлардын жыйналуу интервалын тапкыла. Интервалдын учтарында берилген катарларды жыйналуучулукка изилдегиле.

№1-30. Найти интервал сходимости степенных рядов. Исследовать сходимости рядов на концах интервала.

1. $\frac{x+5}{1}+\frac{(x+5)^2}{16}+\frac{(x+5)^3}{81}+....$ **2.** $\frac{x-4}{1}+\frac{(x-4)^2}{3}+\frac{(x-4)^3}{5}+....$

3. $\frac{x-2}{\sqrt{2}}+\frac{(x-2)^2}{2\sqrt{3}}+\frac{(x-2)^3}{3\sqrt{4}}+\frac{(x-2)^4}{4\sqrt{5}}+....$ **4.** $\frac{(x-4)^2}{3}-\frac{(x-4)^3}{8\cdot 9}+\frac{(x-4)^4}{27\cdot 27}+....$

5. $\frac{(x+2)}{2\cdot 7^2}+\frac{(x+2)^2}{3\cdot 7^3}+\frac{(x+2)^3}{4\cdot 7^4}+....$ **6.** $\frac{x+2}{\sqrt{2}}+\frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}}+\frac{(x+2)^3}{\sqrt{4}}+....$

7. $\frac{(x+3)^3}{1\cdot 4}-\frac{(x+3)^4}{4\cdot 16}+\frac{(x+3)^5}{9\cdot 64}+....$ **8.** $\frac{x-3}{1}+\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(x-3)^3}{9}+\frac{(x-3)^4}{16}+....$

9. $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(x-3)^4}{16}-\frac{(x-3)^6}{64}-..$ **10.** $\frac{x-4}{1}+\frac{(x-4)^2}{8}+\frac{(x-4)^3}{27}+\frac{(x-4)^4}{64}+....$

11. $\frac{(x-1)}{1}+\frac{3(x-1)^2}{2}+\frac{5(x-1)^3}{6}+\frac{7(x-1)^4}{24}+....$

12. $\frac{x+1}{3}+\frac{2(x+1)^2}{9}+\frac{3(x+1)^3}{27}+\frac{4(x+1)^4}{81}+....$

13. $\frac{(x-1)}{2}+\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(x-1)^3}{8}+\frac{(x-1)^4}{16}+.$ **14.** $\frac{(x+1)}{5}+\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(x+1)^3}{125}+.$

15. $\frac{(x-1)}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 8}+\frac{(x-1)^4}{4\cdot 16}+..$ **16.** $\frac{(x+1)}{1\cdot 5}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 25}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 125}+..$

17. $\frac{2(x+1)}{1}+\frac{4(x+1)^2}{2}+\frac{8(x+1)^3}{6}+\frac{16(x+1)^4}{24}+....$

18. $\frac{x+3}{1}+\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(x+3)^3}{6}+\frac{(x+3)^4}{24}+....$

19. $\frac{2(x-2)}{1}+\frac{4(x-2)^2}{2}+\frac{6(x-2)^3}{6}+\frac{8(x-2)^4}{24}+....$

20. $\frac{x+2}{1\cdot 2}+\frac{(x+2)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+2)^3}{3\cdot 8}+\frac{(x+2)^4}{4\cdot 16}+....$

21. $\frac{x-1}{1\cdot 3}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 9}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 27}+\frac{(x-1)^4}{4\cdot 81}+....$ **22.** $\frac{x+5}{4\cdot 1}+\frac{(x+5)^3}{15\cdot 3}+\frac{(x+5)^5}{64\cdot 5}+....$

23. $\frac{x-3}{3}+\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(x-3)^3}{27}+$ **24.** $\frac{2(x-5)}{1}+\frac{4(x-5)^2}{2}+\frac{8(x-5)^3}{6}+\frac{16(x-5)^4}{24}+$

25. $\frac{x+5}{1}+\frac{(x+5)^2}{6}+\frac{(x+5)^3}{120}+....$ **26.** $\frac{x-2}{2}+\frac{(x-2)^2}{24}+\frac{(x-2)^3}{720}+....$

27. $\frac{(x-2)}{4\cdot 2}+\frac{(x-2)^2}{7\cdot 4}+\frac{(x-2)^3}{10\cdot 8}+....$ **28.** $\frac{x+2}{1}+\frac{(x+2)^4}{4}+\frac{(x+2)^9}{9}+....$

29. $\frac{x+2}{3\cdot 3}+\frac{(x+2)^2}{5\cdot 9}+\frac{(x+2)^3}{7\cdot 27}+....$ **30.** $\frac{x-1}{2\cdot 4}+\frac{(x-1)^2}{4\cdot 5}+\frac{(x-1)^3}{8\cdot 6}+....$

5-тапшырма

5 – задание

№1-30. Анык интегралды Маклорендин катарын колдонуп, интегралдын алдындагы функцияны жыйналуучу катар түрүндө туюнтуп, анын маанисин жакындаштырып $0{,}001$ ***тактыкка чейин эсептегиле.***

№1-30. Выразить определенный интеграл в виде сходящегося ряда, используя ряд Маклорена для подынтегральной функции. Найти приближенные значения этого интеграла с точностью до $0{,}001$**.**

1. $\int_0^{0.4} x\ln\left(1+x^2\right)dx$ **2.** $\int_0^{0.6}\frac{\sin 3x}{2x}dx$ **3.** $\int_0^{0.3} x^2\cos x\,dx$ **4.** $\int_0^{0.5} e^{-2x^2}dx$ **5.** $\int_0^{0.5}\ln(1-x)x\,dx$

6. $\int_0^{0.5}\sqrt[3]{1+x}\,dx$ **7.** $\int_0^{0.5} xe^{-x^2}dx$ **8.** $\int_0^{0.3}\sin\left(x^3\right)dx$ **9.** $\int_0^{1}\sqrt[5]{1+x^4}\,dx$ **10.** $\int_0^{0.9}\sqrt{x}\cdot e^{0.5x}dx$

11. $\int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx$ **12.** $\int_0^{0.1} e^{-x^2}dx$ **13.** $\int_0^{1}\sqrt[3]{x}\cos x\,dx$ **14.** $\int_0^{1}\frac{\sin x}{x}dx$ **15.** $\int_0^{1/4}\sqrt{1+x^3}\,dx$

16. $\int_0^{1/9}\sqrt{x}e^{x}dx$ **17.** $\int_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx$ **18.** $\int_0^{0,5}\frac{arctgx}{x}dx$ **19.** $\int_0^{0,9}x^{10}\sin x\,dx$ **20.** $\int_0^{0,4}\frac{dx}{1+x^4}$

21. $\int_0^{1}x\sin\left(x^2\right)dx$ **22.** $\int_0^{0,5}x\cos x\,dx$ **23.** $\int_0^{1}\sqrt[5]{1+x^4}\,dx$ **24.** $\int_0^{0,4}\sqrt{x}e^{x/4}dx$ **25.** $\int_0^{0,5}e^{-2x^2}dx$

26. $\int_0^{0,3}\sqrt{x}e^{0,5x}dx$ **27.** $\int_0^{0,5}\ln\left(1+x^3\right)dx$ **28.** $\int_0^{1}\cos\sqrt{x}\,dx$ **29.** $\int_0^{1}\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$ **30.** $\int_0^{1,5}\frac{\sin 5x}{x}dx$

6-тапшырма
6 – задание

№1-10. Төмөндөгү сызыктар менен чектелген фигуранын аянтын $\varepsilon = 0{,}001$ ***тактыкка чейин жакындаштырып эсептегиле.***

№1-10. Вычислить приближенно площадь фигуры ограниченные указанными линиями с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

1. $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}},\ y = 0,\ x = \dfrac{1}{4},\ x = 1$ 2. $y = e^{-x^2},\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0$

3. $y = \dfrac{\sin x}{x},\ y = 0,\ x = 0.1,\ x = 1$ 4. $y = xe^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 0{,}5$

5. $y = x^2e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 0{,}6$ 6. $y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{1}{4}$

7. $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x},\ y = 0,\ x = \dfrac{1}{3},\ x = \dfrac{1}{2}$ 8. $y = \dfrac{\cos x}{x},\ y = 0,\ x = \dfrac{1}{2},\ x = 1$

9. $y = e^{-x^3},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$ 10. $y = \cos x^2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \dfrac{1}{2}$

№ 11-20. Төмөнкү маанилерди $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} -$ ***ажыратуусун колдонуп*** $\varepsilon = 0{,}001$ ***тактыгына чейин эсептегиле:***

№ 11-20. Используя разложения $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} -$ ***вычислить с точностью*** $\varepsilon = 0{,}001$ ***следующие значение:***

1. $\ln 1{,}3$ 2. $\ln 1{,}1$ 3. $\ln 1{,}4$ 4. $\ln 1{,}6$ 5. $\ln 1{,}5$

6. $\ln 1{,}2$ 7. $\ln 1{,}7$ 8. $\ln 1{,}9$ 9. $\ln 1{,}8$ 10. $\ln 1{,}25$

№ 21-30. Төмөнкү маанилерди $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\ldots$ ***ажыратуусун колдонуп*** $\varepsilon = 0{,}001$ ***тактыгына чейин эсептегиле:***

№ 21-30. Используя разложения $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\ldots$ ***вычислить с точностью*** $\varepsilon = 0{,}001$ ***следующие значения.***

1. $\ln 2$ 2. $\ln 3$ 3. $\ln 4$ 4. $\ln 7$ 5. $\ln 9$

6. $\ln 5$ 7. $\ln 6$ 8. $\ln 8$ 9. $\ln 4{,}5$ 10. $\ln 2{,}5$

7-тапшырма
7 - задание

Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме.

Көрсөтмө: Дифференциалдык теңдемени интегралдоодо төмөндөгүлөрдү аныктоо керек.

1. Теңдеменин тибин аныктоо керек;
2. Теңдемеге тийешелүү усулдардын негизинде анын жалпы чыгарылышын табуу керек;
3. Теңдеменин баштапкы шартты канаттандырган жекече чыгырылышын табуу керек;

Биринчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин тибин аныктоого жана аларды чыгыруууга көрсөтмөлөрдүн таблицасы

№	Дифференциалдык теңдемелердин түрү	Теңдеменин аталышы	Чыгарууга көрсөтмө
2.	$\mathrm{M}(x)\cdot \mathrm{N}(y)dx + M_1(x)\cdot N_1(y)dy = 0$	Өзгөрүлмөлөргө ажыроочу	$\dfrac{M(x)}{M_1(x)}dx + \dfrac{N_1(x)}{N(y)}dy = 0$
3.	$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$	Бир тектүү	$\dfrac{y}{x} = t$ ордуна коюсу
4.	$y' + P(x)\cdot y = Q(x)$	y жана y' ке карата сызыктуу	$y = u\vartheta$ ордуна коюсу
5.	$xy + P(y)\cdot x = Q(y)$	x жана x' ке карата сызыктуу	$x = u\vartheta$ ордуна коюсу
6.	$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^n$ мында $n \neq 0$ жана $n \neq 1$	Бернуллинин теңдемеси	$y^{n-1} = t$ ордуна коюсу
7.	$M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ $\dfrac{\partial M(x;y)}{\partial NNy} = \dfrac{\partial N(x;y)}{\partial x}$	Толук дифференциалдагы дифференциялдык теңдеме	$\begin{cases} u = M(x;y)dx + \varphi(y) \\ v = N(x;y)dy + \psi(x) \end{cases}$ $u = c$ ордуна коюсу

Эскертүү: Эгерде дифференциалдык теңдеме бир нече типке тийешелүү болсо, анда алардын ичинен эң жөнөкөйүн тандап алуу керек.

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Указания: при решении дифференциального уравнения нужно.

1. Определить, к какому типу оно принадлежит, таблица некоторых типов дифференциальных уравнений первого порядка приведена ниже;
2. Найти общее решение или общий интеграл уравнения методам, разработанных для такого типа уравнений;
3. Найти частное решения или частный интеграл, удовлетворяющий этому условию.

Таблица

Дифференциальных уравнений первого порядка и указания к их решению

№	**Вид дифференциального уравнения**	**Названия уравнения**	**Указания к решению**
1.	$\mathrm{M}(x)\cdot \mathrm{N}(y)dx + M_1(x)\cdot N_1(y)dy = 0$	Уравнения с разделяющимся переменными	$\frac{M(x)}{M_1(x)}dx + \frac{N_1(x)}{N(y)}dy = 0$
2.	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Однородное	Подстановка $\frac{y}{x} = t$
3.	$y' + P(x)\cdot y = Q(x)$	Линейное относительно y и y'	Подстановка $y = u\vartheta$
4.	$x' + P(y)\cdot x = Q(y)$	Линейное относительно x и x'	Подстановка $x = u\vartheta$
5.	$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^n$ где $n \neq 0$ и $n \neq 1$	Уравнение Бернулли	Подстановкой $y^{n-1} = t$ сводится к линейному уравнению
6.	$M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ $\frac{\partial M(x;y)}{\partial NNy} = \frac{\partial N(x;y)}{\partial x}$	Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах	$\begin{cases} u = M(x;y)dx + \varphi(y) \\ v = N(x;y)dy + \psi(x) \end{cases}$ $u = c$

Примечания: Если данное дифференциальное уравнения относится сразу к нескольким типам, то для решения выбирают более простую из них.

№1-30. Берилген дифференциалдык теңдеменинн жалпы чыгарылышын жана $x = x_0$ ***дө*** $y = y_0$ ***болгон баштапкы шартын канаттандырган жекече чыгарылышын тапкыла.***

№1-30. **Найти общее решения данного дифференциального уравнения и ее частное решения, удовлетворяющего начальному условию** $y = y_0$ **при** $x = x_0$**.**

1. $(x^2+1)y' - xy = (x^2+1)x$ $\quad y_0 = 6, \quad x_0 = \sqrt{3}$

2. $y' - yctgx = 2x\sin x$ $\quad y_0 = 1, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

3. $(x + xy^2) - (y + x^2 y)y' = 0$ $\quad y_0 = \sqrt{3}, \quad x_0 = \sqrt{2}$

4. $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$ $\quad y_0 = 6, \quad x_0 = 0$

5. $(x+2)\cdot y' + 5x = y$ $\quad y_0 = 2, \quad x_0 = 1$

6. $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$ $\quad y_0 = 7, \quad x_0 = 0$

7. $y'x - 2y = x + 1$ $\quad y_0 = \frac{3}{2}, \quad x_0 = 2$

8. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$ $\quad y_0 = \sqrt{2}, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

9. $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$ $\quad y_0 = 2, \quad x_0 = 0$

10. $xy' = x + 2y$ $\quad y_0 = 0, \quad x_0 = 0$

11. $(xy' - y)atctg\frac{y}{x} = x$ $\quad y_0 = 0, \quad x_0 = 1$

12. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$ $\quad y_0 = 1, \quad x_0 = 0$

13. $y' + 2y = 4x$ $\quad y_0 = 5, \quad x_0 = 1$

14. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ $\quad y_0 = 6, \quad x_0 = 0$

15. $xy' + y - e^x = 0$ $\quad y_0 = 1 \quad x_0 = 0$

16. $xy' - \frac{y}{x+1} = x$ $\quad y_0 = 0, \quad x_0 = 1$

17. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$ $\quad y_0 = 2, \quad x_0 = 0$

18. $y' - ytgx = \sec x$ $\quad y_0 = 0, \quad x_0 = 0$

19. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ $\quad y_0 = 1, \quad x_0 = 0$

20. $t(1+t^2)dx = (x + xt^2 - t^2)dt$ $\quad t_0 = 1, \quad x_0 = -\dfrac{\pi}{4}$

21. $y' = \dfrac{y+1}{x}$ $\quad y_0 = 0, \quad x_0 = 1$

22. $e^{x-y}y' = 1$ $\quad y_0 = 1, \quad x_0 = 1$

23. $y' ctgx + y = 2$ $\quad y_0 = 2, \quad x_0 = 0$

24. $e^y(y'+1) = 1$ $\quad y_0 = 0, \quad x_0 = 0$

25. $y'y + y^2 = \cos x$ $\quad x_0 = \pi/4, \quad y_0 = 1$

26. $x^3dx - (x^4 + y^3)dy = 0$ $\quad y_0 = 1, \quad x_0 = 0$

27. $y' + y = \cos x$ $\quad y_0 = \dfrac{1}{2}, \quad x_0 = 0$

28. $y' - 2y = -x^2$ $\quad x_0 = 1/4, \quad x_0 = 0$

29. $y' = 2xy + x^2$ $\quad y_0 = 0, \quad x_0 = 0$

30. $y' = (x+y)^2$ $\quad y_0 = 1, \quad x_0 = 0$

8-тапшырма
8 - задание

Көрсөтмө. Тартиби төмөндөөчү дифференциалдык теңдемелерге төмөндөгү теңдемелердин типтери кирет.

I. $Y^{(n)} = f(x)$; x боюнча “n” жолу кайталап удаалаш интегралдоо жолу менен интегралданат.

II. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ $y^{(k)} = z(x)$ ордуна коюу жолу менен теңдеменин тартиби k бирдигине төмөндөйт. (Мында $y^{(k+1)} = z', ...y^{(n)} = z^{(n-k)}$ түрүндө аныкталат)

III. $F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ $y' = p(y)$ ордуна коюу жолу менен теңдеменин тартиби бир бирдикке төмөндөйт. (Мында $y' = p\dfrac{dp}{dy}, y''' = p^2\dfrac{d^2p}{dy^2} + \mathrm{P}\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2$ түрүндө аныкталат)

Указания. К дифференциальным уравнениям, допускающим понижение порядка, относятся следующие типы уравнений.

I. $Y^{(n)} = f(x)$

Метод решения – последовательное интегрирование уравнения по x “n” раз.

II. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$

Замена $y^{(k)} = z(x)$ при этом $y^{(k+1)} = z', ...y^{(n)} = z^{(n-k)}$ понижает порядок этого дифференциального уравнения на k единиц.

III. $F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$

Замена $y' = p(y)$ (при этом $y'' = p\dfrac{dp}{dy}, y''' = p^2\dfrac{d^2p}{dy^2} + \mathrm{P}\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2$ и так далее) понижает порядок уравнения на одну единицу.

№1-30. Тартиби төмөндөөчү дифференциалдык теңдемени интегралдагыла.

№1-30. Проинтегрировать дифференциальных уравнений допускающих понижение порядка.

1. $x^2 \cdot y'' = (y')^2$ **2.** $(y')^2 - 2yy'' = 0$ **3.** $y'' = 2yy'$ **4.** $(y'')^2 - 5y' + 6 = 0$

5. $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$ **6.** $2xy'''\cdot y'' = (y'')^2 - 1$ **7.** $y'''(x-1) - y'' = 0$

8. $1 + (y')^2 = y \cdot y''$ **9.** $y \cdot y'' - (y')^2 = 0$ **10.** $a - (y'')^2 = 1 + (y')^2$

11. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)\cdot(y')^2 = 0$ **12.** $y''(1+y) = (y')^2 + y'$

13. $3y' - y'' = 2y$ **14.** $yy'' + 1 = (y')^2$ **15.** $y \cdot y'' - (y')^2 = y^2 y'$ **16.** $y'' \cdot y^3 = 1$

17. $3y'y'' = 2y$ **18.** $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$ **19.** $y'' = y'(1 + e^x)$ **20.** $y'' - 9y = 0$

21. $y^3 y'' = 1$ **22.** $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ **23.** $y''' = x + \cos x$

24. $(1 + x^2)y'' - (y')^2 + 1 = 0$ **25.** $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ **26.** $y'' \cdot (2y + 3) - 2(y')^2 = 0$

27. $y \cdot y'' - (y')^2 = y^2 \ln y$ **28.** $y'' = y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$ **29.** $y \cdot y'' = (y')^2$ **30.** $4y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$

9-тапшырма
9 - задание

№1-30. Турактуу коэффциенттүү дифференциалдык теңдеменин жалпы чыгарылышын тапкыла жана чыгарылышты текшергиле.
№1-30. Найти общее решения дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и сделать проверку.

1. $y'' + 4y = x^2 + 5$ **2.** $y'' + 4y' + 5y = 5\sin 3x$ **3.** $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$

4. $y'' + 9y' + 20y = 5e^{3x}$ **5.** $y'' + 4y = 5x^2 + 4x - 3$ **6.** $y'' + y = 5x^2 + 4$

7. $y'' + 9y = 5\sin 2x - 4\cos 2x$ **8.** $y'' - 8y' + 16y = x^2 - 5x + 4$

9. $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$ **10.** $y'' + 4y = x^2 + 4x + 5$ **11.** $y'' + y = 5x^2 - 4$

12. $y'' - 2y' + y = 4e^x$ **13.** $y'' + 2y' + y = -2$ **14.** $y'' - y' + y = -13\sin 2x$

15. $y'' - 3y' = e^{3x}$ **16.** $y'' + 4y = x^2 + 5x - 6$ **17.** $y'' - 3y' - 4y = 5\cos x$

18. $y'' - 3y - 4y = 17\sin x$ **19.** $2y'' + y' - y = 2e^x$ **20.** $y'' + a^2 y = e^x$

21. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$ **22.** $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x$

23. $y'' - 6y' + 2y = 2x^2 - x + 3$ **24.** $y'' - 2y' + 2y = 2x$ **25.** $y'' + 4y' - 5y = 1$

26. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{-2x}$ **27.** $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$ **28.** $2y'' + 5y' = 29\cos x$

29. $y'' - 3y' + 2y = 3x - 5\sin x$ **30.** $2y'' + 5y' = \cos 2x$

Математик эмес адистиктердин студенттери үчүн «Катарлар териясы» жана ***«Дифференциалдык теңдемелер»*** бөлүмдөрү боюнча өз алдынча иштердин топтому.

Сборник самостоятельных работ ***для студентов не математических специальностей*** по разделам: ***«Теория рядов» и «Дифференциальные уравнения»***

1-тапшырма
1 –задание

№ 1-30. Сандык катарларды жыйналуучулукка изилдегиле.

№ 1-30. Исследовать на сходимость числовые ряды.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n4^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n+1}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{4n+5}$; 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n+2}}$; 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)!}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n+1}$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$; 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n+1}$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^2}{5^n}$; 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n+1}\right)^n$; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(n+1)!}$; 15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{n^n}$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; 17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/3}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/3}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n2^n}$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$; 21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$; 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; 23. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+1}\right)^n$; 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n n!}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$; 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n+1)}$; 27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$; 28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)^n}$; 29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt{n+1}}$; 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{10^n}$

2-тапшырма
2 –задание

№ 1-30. ***Найти интервал сходимости степенных рядов.***

№ 1-30. ***Найти интервал сходимости степенных рядов.***

1. $\dfrac{x+5}{1}+\dfrac{(x+5)^2}{16}+\dfrac{(x+5)^3}{81}+....$

2. $\dfrac{x-4}{1}+\dfrac{(x-4)^2}{3}+\dfrac{(x-4)^3}{5}+....$

3. $\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}+\dfrac{(x-2)^2}{2\sqrt{3}}+\dfrac{(x-2)^3}{3\sqrt{5}}+\dfrac{(x-2)^4}{4\sqrt{5}}+....$

4. $\dfrac{(x-4)^2}{3}-\dfrac{(x-4)^4}{8\cdot 9^2}+\dfrac{(x-4)^5}{27\cdot 27}+....$

5. $\dfrac{x+2}{2\cdot 7^2}+\dfrac{(x+2)^2}{3\cdot 7^3}+\dfrac{(x+2)^3}{4\cdot 7^4}+....$

6. $\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}+\dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{3}}+\dfrac{(x+2)^3}{\sqrt{4}}+....$

7. $\dfrac{(x+3)^2}{1\cdot 4}-\dfrac{(x+3)^4}{4\cdot 16}+\dfrac{(x+3)^6}{9\cdot 64}+....$

8. $\dfrac{x-3}{1}+\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(x-3)^3}{9}+\dfrac{(x-3)^4}{16}+....$

9. $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(x-3)^4}{16}-\dfrac{(x-3)^6}{64}-....$

10. $\dfrac{x-4}{1}+\dfrac{(x-4)^2}{8}+\dfrac{(x-4)^3}{27}+\dfrac{(x-4)^4}{64}+....$

11. $\dfrac{x-1}{1}+\dfrac{3(x-1)^2}{2}+\dfrac{5(x-2)^3}{6}+\dfrac{7(x-1)^4}{24}+....$

12. $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{2(x+1)^2}{9}+\dfrac{3(x+1)^3}{27}+....$

13. $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(x-1)^3}{8}+\dfrac{(x-1)^4}{12}+....$

14. $\frac{x+1}{5}+\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(x+1)^3}{125}+....$

15. $\frac{x-1}{5}-\frac{(x-1)^2}{25}-\frac{(x+1)^3}{125}-....$

16. $\frac{x-1}{1\cdot 2}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 8}+\frac{(x-1)^4}{4\cdot 16}+....$

17. $\frac{2(x+1)}{1}+\frac{4(x+1)^2}{2}+\frac{8(x+1)^3}{6}+\frac{16(x+1)^4}{24}+....$

18. $\frac{x+3}{1}+\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(x+3)^3}{6}+\frac{(x+3)^4}{24}+....$

19. $\frac{2(x-2)}{1}+\frac{4(x-2)^2}{2}+\frac{6(x-2)^3}{6}+\frac{8(x-2)^4}{24}+....$

20. $\frac{x+2}{1\cdot 2}+\frac{(x+2)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+2)^3}{3\cdot 8}+\frac{(x+2)^4}{4\cdot 16}+....$

21. $\frac{x-1}{1\cdot 3}+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 9}+\frac{(x-1)^3}{3\cdot 27}+\frac{(x-1)^4}{4\cdot 81}+....$

22. $\frac{x+5}{4\cdot 1}+\frac{(x+5)^3}{15\cdot 3}+\frac{(x+5)^5}{64\cdot 5}+....$

23. $\frac{x-3}{3}+\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(x-3)^3}{27}+....$

24. $\frac{2(x-5)}{1}+\frac{4(x-5)^2}{2}+\frac{8(x-5)^3}{6}+\frac{16(x-5)^4}{24}+....$

25. $\frac{x+5}{1}+\frac{(x+5)^2}{6}+\frac{(x+5)^3}{120}+....$

26. $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+....+\frac{x^n}{n!}+....$

27. $1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+....+n!\,x^n+....$

28. $\frac{x}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+....+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^2}+.....$

29. $1+2(x-1)+2^2(x-1)^2+2^3(x-1)^3+....+2^n(x-1)^n+....$

30. $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2^3}+\frac{x^4}{2^4}+....+\frac{x^n}{n^n}+....$

3-тапшырма
3 – задание

№ 1-30. Анык интегралды Маклорендин катарын колдонуп, интегралдын алдындагы функцияны жыйналуучу катар түрүндө туюнтуп, анын маанисин жакындаштырып $0{,}001$ ***тактыкка чейин эсептегиле.***

№ 1-30. Выразить определенный интеграл в виде сходящегося ряда, используя ряд Маклорена для подынтегральной функции. Найти приближенные значения этого интеграла с точностью до $0{,}001$***.***

1. $\int_0^{0,4} x\ln\left(1+x^2\right)dx$

2. $\int_0^{0,6} \frac{\sin 3x}{2x}dx$

3. $\int_0^{0,3} x^2\cos x dx$

4. $\int_0^{0,5} e^{-2x^2}dx$

5. $\int_0^{0,5} e^{2x^2}dx$

6. $\int_0^{0,5} \sqrt[3]{1+x}dx$

7. $\int_0^{0,5} xe^{-x^2}dx$

8. $\int_0^{0,3} \sin\left(x^3\right)dx$

9. $\int_0^{1} \sqrt[5]{1+x^4}dx$

10. $\int_0^{0,9} \sqrt{x}e^{0,5x}dx$

11. $\int_0^{0,1} \frac{\sin x}{x}dx$

12. $\int_0^{1} e^{-x^2}dx$

13. $\int_0^{1} \sqrt[3]{x}\cos x dx$

14. $\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$

15. $\int_0^{1/4} \sqrt{1-x^3}dx$

16. $\int_0^{1/3} \sqrt{x}e^{x}dx$

17. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx$

18. $\int_0^{0,5} \frac{arctgx}{x}dx$

19. $\int_{0,1}^{0,8} x^{10}\sin x dx$

20. $\int_{0,1}^{0,4} \frac{dx}{1+x^4}$

21. $\int_{0}^{1} x\sin\left(x^2\right)dx$

22. $\int_{0}^{0,5} x\cos x dx$

23. $\int_{0}^{1} \sqrt[5]{1+x^4}\,dx$

24. $\int_{0}^{0,4} x\ln\left(1+x^3\right)dx$

25. $\int_{0}^{1,5} \frac{\sin 5x}{x}dx$

26. $\int_{0}^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2}dx$

27. $\int_{0}^{0,09} \sqrt{x}e^{x}dx$

28. $\int_{0}^{0,4} \sqrt{x}e^{\frac{x}{4}}dx$

29. $\int_{0}^{0,16} \sqrt{x}e^{x}dx$

30. $\int_{0}^{0,5} x\sin x dx$

4-тапшырма
4 – задание

№ 1-30. $0{,}001$ ***тактыкка чейин жакындаштырып эсептегиле.***

№ 1-30. Вычислить приближенно с точностью до $0{,}001$**.**

1. $\sqrt{19}$
2. $\cos 18^\circ$
3. $\sqrt{e}$
4. $\sqrt[4]{9}$
5. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$
6. $\sin 9^\circ$
7. $\ln 5$
8. $\frac{1}{\sqrt{e}}$
9. $\ln 2$
10. $\ln 0{,}97$
11. $\ln 10$
12. $\ln 3$
13. $\ln 0{,}96$
14. $\sqrt[3]{1{,}06}$
15. $\sqrt{17}$
16. $\sqrt[3]{1020}$
17. $\sqrt[3]{124}$
18. $\sin 1^\circ$
19. $\sin 18^\circ$
20. $\sin 11^\circ$
21. $\cos 20^\circ$
22. $\ln 1{,}2$
23. $\cos 25^\circ$
24. $\cos 4^\circ$
25. $arctg\, 0{,}1$
26. $\sqrt[5]{1{,}1}$
27. $\sin 10^\circ$
28. $\sqrt{1{,}004}$
29. $\sqrt[3]{30}$
30. $\sqrt[3]{1{,}1}$

5-тапшырма
5 – задание

№ 1-30. Берилген дифференциалдык тендемелердин жалпы чыгарылышын жана берилген $y(x_0)=y_0$ баштапкы шартты канаттандырган жекече чыгарылышын тапкыла.

№ 1-30. Найти общее решение дифференциальных уравнений и частные решения при следующих начальных условиях $y(x_0)=y_0$

1. $a)\ (x+1)^3 dy-(y-2)^2 dx=0;\quad y(0)=0.\quad b)\ y''-4y'-12y=8\sin 2x;\quad y(0)=0;\quad y'(0)=0.$

2. $a)\ \left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y'-y=0;\quad y(1)=1.\quad b)\ y''-6y'+9y=x^2-x+3;\quad y(0)=\frac{4}{3};\quad y'(0)=\frac{1}{27}.$

3. $a)\ ydx+ctgxdy=0;\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.\quad b)\ y''+y=e^{-2x};\quad y(0)=0;\quad y'(0)=0.$

4. $a)\ y'\cos^2 x\ln x=y;\quad y(\pi)=0.\quad b)\ y''-2y'+5y=xe^{2x};\quad y(0)=1;\quad y'(0)=0.$

5. $a)\left(1+x^2\right)y^3dx-\left(y^2-1\right)^2x^3dy=0;\ y(1)=1.\ b)y''-2y'+6y=(12x-7)e^{-x};\ y(0)=0;\ y'(0)=1.$

6. $a)\ tgx\sin^2 xdx+\cos^2 xctgydy=0;\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}.\quad b)\ y''-5y'+6y=e^{-x};\quad y(0)=1;\quad y'(0)=1.$

7. $a)3e^x tgy\cos^2 ydx-\left(1+e^x\right)^2dy=0;\ y(0)=\frac{\pi}{4}.\ b)\ y''-4y'+13y=26x+5;\ y(0)=1;\ y'(0)=0.$

8. $a)\ \left(xy^2+x\right)dx+\left(x^2y-y\right)^2dy=0;\quad y(0)=1.\quad b)\ y''-4y'=6x^2+1;\quad y(0)=2;\quad y'(0)=3.$

9. $a)\ \left(xy^2+y^2\right)dx-\left(-x^2y+x^2\right)dy=0;\quad y(1)=1.\quad b)\ y''-2y'+y=16e^x;\quad y(0)=1;\quad y'(0)=2.$

10. $a)\ x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,y'=0;\quad y(0)=0.\quad b)\ y''+6y'+9y=10e^{-5x};\quad y(0)=3;\quad y'(0)=2.$

11. $a)\ \left(1+y^2\right)dx-xydy=0;\quad y(2)=1.\quad b)\ y''+4y=(6x+5)e^{-2x};\quad y(0)=0;\quad y'(0)=\frac{3}{4}.$

12. $a)(xy+x)^3dx-\left(x^2y+y\right)^2dy=0;y\left(\sqrt{3}\right)=0.\ b)y''+2y'-8y=(12x+20)e^{2x};\ y(0)=0;\ y'(0)=3.$

13. $a)\ \left(1+x^2\right)dy-2xydx=0;\quad y(0)=1.\quad b)\ y''-2y'+10y=74\sin 3x;\quad y(0)=6;\quad y'(0)=3.$

14. $a)\ y'+\sqrt{y}\sin x=0;\quad y(0)=0.\quad b)\ y''-4y'+13y=e^{2x};\quad y(0)=0;\quad y'(0)=1.$

15. $a)\ y'tgx-y=0;\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}.\quad b)\ y''+y=-8\sin x-6\cos x;\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2};\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\pi.$

16. $a)2xy\left(1+x^2\right)dy-2x(y+3)dx=0;y(0)=1.\ b)y''-3y'-10y=10x^2+4x+5;y(0)=0;y'(0)=2.$

17. $a)\ \left(1-x^2\right)y'+xy=0;\quad y(0)=4.\quad b)\ y''-17y'+30y=3x-1;\quad y(0)=0;\quad y'(0)=4.$

18. $a)\ \sqrt{x}dy-\sqrt{x}dx=0;\quad y(0)=0.\quad b)\ y''-5y'+4y=2x+1;\quad y(0)=1;\quad y'(0)=2.$

19. $a)\ xyy' = 1 - x^2; \quad y(1) = 1. \quad b)\ y'' - 13y' - 30y = (x+3)e^{3x}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 4.$

20. $a) xdy - (2xy + 3y)dx = 0; \ y(-1) = 2. \quad b) y'' - 19y' + 34y = x^2 - 3x + 1; \ y(0) = 1; \ y'(0) = 3.$

21. $a)\ (y + xy)dx + (x - xy)dy = 0; \quad y(1) = 1. \quad b)\ y'' + 18y' - 40y = e^{2x}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 3.$

22. $a)\ e^x(1 + e^y)dx + e^y(1 + e^x)dy = 0; \quad y(0) = 0. \quad b)\ y'' - 16y' - 57y = e^{4x}; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = -1.$
23. $a)\ y \ln y + y'x = 0; \quad y(e) = e. \quad b)\ y'' - 14y' - 51 = e^{5x}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 4.$

24. $a)\ y'\sqrt{1 - x^2} - x = 0; \quad y(0) = 0. \quad b)\ y'' + 13y' - 48y = e^{2x}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 2.$

25. $a)\ dx - \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0; \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}. \quad b)\ y'' + 11y' - 42y = xe^x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$

26. $a)\ y'ctgx + y = 2; \quad y(0) = 1. \quad b)\ y'' + y = -8\sin x - 6\cos x; \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}; \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

27. $a)\ (xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0; \quad y(0) = 1. \quad b)\ y'' - 4y = 6x^2 + 1; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$

28. $a)\ xdy = (x + y)dx; \quad y(-1) = 2. \quad b)\ y'' - 2y' + 13y = e^x; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$

29. $a)(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0; \ y(1) = 0. \ b)\ y'' - 17y' + 30y = 2x - 1; \ y(0) = 0; \ y'(0) = 2.$

30. $a)\ y^2dx + (x^2 - xy)dx = 0; \quad y(0) = -5. \quad b)\ y'' - 4y' = 4x^2 + 1; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 4.$

6-тапшырма
6 – задание

№1-30. Тартиби төмөндөөчү дифференциалдык теңдемени интегралдагыла.

№1-30. Проинтегрировать дифференциальных уравнений допускающих понижение порядка.

2. $x^2 \cdot y'' = (y')^2$ **2.** $(y')^2 - 2yy'' = 0$ **3.** $y'' = 2yy'$ **4.** $(y'')^2 - 5y' + 6 = 0$

5. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$ **6.** $2xy''' \cdot y'' = (y'')^2 - 1$ **7.** $y'''(x-1) - y'' = 0$

8. $1 + (y')^2 = y \cdot y''$ **9.** $y \cdot y'' - (y')^2 = 0$ **10.** $a - (y'')^2 = 1 + (y')^2$

11. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y) \cdot (y')^2 = 0$ **12.** $y''(1 + y) = (y')^2 + y'$

13. $3y' - y'' = 2y$ **14.** $yy'' + 1 = (y')^2$ **15.** $y \cdot y'' - (y')^2 = y^2 y'$ **16.** $y'' \cdot y^3 = 1$

17. $3y'y'' = 2y$ **18.** $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$ **19.** $y'' = y'(1 + e^x)$ **20.** $y'' - 9y = 0$

21. $y^3 y'' = 1$ **22.** $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ **23.** $y''' = x + \cos x$

24. $(1 + x^2)y'' - (y')^2 + 1 = 0$ **25.** $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ **26.** $y'' \cdot (2y + 3) - 2(y')^2 = 0$

27. $y \cdot y'' - (y')^2 = y^2 \ln y$ **28.** $y'' = y^{-\frac{1}{2}} \cdot y'$ **29.** $y \cdot y'' = (y')^2$ **30.** $4y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$

К о л д о н у л г а н   а д а б и я т т а р:

1. Борубаев А., Шабыкеев Б. ж.б., «Математикалык анализ» 1-2 бөлүм. –Бишкек: 2009.
2. Усубакунов Р. «Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр»
3. Исаков А. «Аналитикалык геометрия», – Фрунзе: 1986.
4. Саттаров Ж. «Алгебра жана сандар теориясы» I-II бөлүм. – Ош: 1991.
5. Сулайманов Ж. «Жогорку математика сабагынан лекциялар жайнагы» –Бишкек:1993.
6. Матиева Г. «Аналитикалык геометрия», – Ош:1994.
7. Толбаев Б. «Тегиздиктеги аналитикалык геометрия боюнча усулдук колдонмо» – Сүлүктү: 2003.
8. Соловников А. «Математика в экономике» – Москва: «Фин и стат» 2000.
9. Бекельман И.Я. «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» – Москва: «Просвещение» 1986.
10. Баврин И.И. «Высшая математика» – Москва: «Просвещение» 1980.
11. Романко В.К. «Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления» – Москва: Физматлит 2001.
12. Красс М.С. «Математика для экономистов» – С-П: «Питер» 2007.
13. Смирнов В.И. «Курс высшей математики» т.1-4 . –Москва: «Наука» 1974.
14. Пискунов Н.С., «Дифференциальное и интегральное исчисления» т.I,II, –Москва: «Наука» 1965.
15. Фихтенгольц Г. «Основы математического анализа», т.I,II,III, –М: «Наука» 1968.
16. Толубаев Ж.О., Кудаяров К.С., «Математика боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы» –Бишкек: «Турар» 2005.
17. Т.Б.Борубаев, Ж.О.Толубаев «Сборник задач по высшей математике» –Жалал-Абад: 1995.
18. Берман Г.Н., «Сборник задач по курсу математического анализа», –Москва: «Наука» 1964.
19. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» –Москва: Госиздат, 1964.
20. Гмурман В.Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» – Москва: «Высшая школа» 1989.

21. Данко П.Е. «Высшая математика в упражнениях и задачах»
Попов А.Т., и.др. 1-2 часть –Москва: «Высшая школа»1999.
22. Минорский В., «Сборник задач по высшей математике»
– Москва М: «Физ. мат литература» 2002.

23. Садовничий В, «Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре» – Москва: «Логос» 2005.
24. Клетеник Д.В. «Сборник задач по аналитической геометрии»
– Москва: «Наука» 1986.

25. Проскуряков В.«Сборник задач по линейной алгебре»
– Москва: «Наука» 1970.

М А З М У Н У

Басууга 4-декабрь 2015-ж. Кол коюлду. Ченеми 60x84/16
Көлөмү 3.0 басма табак. Нускасы 200 экз.

“Айат” басмаканасында басылды.
Бишкек ш.Ташкен к., 60